DOI:10.15938/j.emc.2008.03.024
第12卷 第3期 电 机 与 控 制 学 报 Vol.12 No.3
2008年 5月 ELECTRIC MACHINES AND CONTROL May 2008

不确定时滞广义系统的 H_∞ 保性能控制

胡南辉, 金朝永, 陈德银
(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510006)

摘 要: 针对一类具有范数有界不确定性的连续时滞广义系统, 采用线性矩阵不等式处理方法, 研究了具有鲁棒 H_∞ 性能的保性能控制问题, 并给出了问题可解的一个充分条件和 H_∞ 保性能控制器的设计, 使得闭环系统不仅对于容许的参数不确性保持正则、稳定、无脉冲, 而且能保证闭环系统的二次性能指标具有某一个上界以及给定的 H_∞ 性能 γ。进一步, 通过求解一个凸优化问题, 给出了系统的 H_∞ 最优保性能控制器的设计方法。算例和仿真结果表明该方法的正确性和可行性。

关键词: 广义系统; 时滞; 不确定性; H_∞ 控制; 保性能控制; 线性矩阵不等式 (LMI)
中图分类号: TP13 文献标识码: A 文章编号: 1007-449X(2008)03-0331-06

H_∞ guaranteed cost control for singular system with state delay and parameter uncertainty

HU Nan-hui, JIN Chao-yong, CHEN De-ying
(College of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract: The design of robust H_∞ guaranteed cost controller was studied for a class of norm bounded uncertain singular systems. Based on the linear matrix inequalities (LMI) approach, a sufficient condition is presented for the existence of H_∞ guaranteed cost controller. The close-loop system satisfies a given attenuation disturbance H_∞ performance γ, provides a guaranteed cost and keeps regular, causal and stable for all admissible uncertainties. On this basis, the design problem of the optimal H_∞ guaranteed cost controller for the systems is formulated as a convex optimization problem, which can be solved by the existing convex optimization techniques. Finally, a numerical example is presented to illustrate the feasibility and validity of this approach.

Key words: singular system; time-delay; uncertainty; H_∞ control; guaranteed cost control; linear matrix inequality

1 引 言

时滞和不确定性广泛存在于各类的工业系统中, 如通信系统、电力系统、化工过程等。时滞和不确定性的存在往往使得控制系统达不到满意的性能甚至不能保证控制系统的稳定性。随着研究的深入, 由于广义系统具有更广泛的适应性, 因此, 不确定时滞广义系统的控制问题引起人们的广泛注意。文献[1]通过研究系统的广义二次稳定和广义二次能稳定解决了不确定时滞广义系统的鲁棒稳定性和鲁棒镇定问题。文献[2]则研究了不确定广义时滞系统的保性能控制问题, 并给出了控制器存在的一

收稿日期: 2007-06-29
基金项目: 教育部高等学校博士学科点专项科研基金(20050562003)
作者简介: 胡南辉(1982-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为保成本控制;
金朝永(1962-), 男, 教授, 主要研究方向鲁棒控制;
陈德银(1983-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为中立型系统鲁棒控制。

个充分条件。实际存在于现实系统的大量不确定因素以及外部干扰,使得在控制系统设计中必须同时考虑闭环系统的鲁棒性和抗干扰能力,也就是说要实现控制系统的多目标设计。其中一种有效的方法就是不确定系统的 H_∞ 保性能控制方法[3-7]。文献[5,6]研究了两类不同广义系统的 H_∞ 保性能控制问题,但都没有涉及时滞问题。

本文基于线性矩阵不等式(LMI)方法,把保性能控制和 H_∞ 控制的优点运用到具有状态时滞的不确定广义系统的鲁棒性研究中,研究了使闭环系统具有良好的动态性能,给出了控制器存在的一个充分条件和可保性能指标,控制器可由线性矩阵不等式求解,应用方便,最后用数值例子说明方法的有效性。

2 问题描述

考虑以下线性系统:

$$\left.\begin{aligned}E\dot{x}(t)=&(A+\Delta A)x(t)+(A_d+\Delta A_d)x(t-d_1(t))+\\&Bu(t)+B_1\omega(t)+B_du(t-d_2(t)),\\z(t)=&Cx(t)+C_dx(t-d_1(t))+Du(t)+\\&D_du(t-d_2(t))+B_2\omega(t)。\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中,$x(t)\in R^n$,$u(t)\in R^p$分别是系统的状态向量和控制输入向量;$\omega(t)\in R^q$是平方可积的外部干扰;$z(t)\in R^m$是系统的输出;$E\in R^{n\times n}$且 $\mathrm{rank}E=r<n$;A,A_d,B,B_1,B_2,B_d,C,C_d,D,D_d是适当维数的已知常数矩阵;$d_i(t)(i=1,2)$是系统的时间延迟,满足

$$0\leqslant d_i(t)\leqslant+\infty,\quad \dot{d}_i(t)\leqslant\beta_i<1,\quad i=1,2。\tag{2}$$

ΔA,ΔA_d是适当维数的不确定矩阵函数,表示系统模型中的参数不确定性。假定所考虑的参数不确定是范数有界的,并具有以下形式:

$$[\Delta B\quad \Delta A_d]=D_1F(t)[E_1\quad E_2]。\tag{3}$$

其中:D_1,E_1,E_2是适当维数的已知常数矩阵,反映了不确定性的结构信息;$F(t)\in R^{j\times k}$是满足 $F^T(t)F(t)\leqslant I$的不确定参数矩阵,它可以是时变的。

由于 $\mathrm{rank}E=r<n$,为不失一般性,假定广义系统(1)中的矩阵 E具有如下形式:

$$E=\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}\tag{4}$$

其中:I_r是 r阶单位阵。系统的初始条件为($x(0)$,$x(t)$)=(x_0,$\varphi(t)$),$t<0$。

对系统(1),选取性能指标函数

$$J=\int_0^\infty[x^T(t)R_1x(t)+u^T(t)R_2u(t)]\,dt\tag{5}$$

其中,$R_1>0$,$R_2>0$为给定的对称正定加权矩阵。关于系统(1)的 H_∞ 保性能鲁棒控制器,由文献[7]可以引进如下定义。

定义 对于系统(1)和性能指标(5)以及平方可积的外部干扰 $\omega(t)$,如果存在一个控制器

$$u(t)=Kx(t),\quad K\in R^{m\times n}\tag{6}$$

使得对所允许的不确定性,闭环系统

$$\left.\begin{aligned}E\dot{x}(t)=&A_1x(t)+A_2x(t-d_1(t))+\\&B_dKx(t-d_2(t))+B_1\omega(t),\\z(t)=&(C+DK)x(t)+C_dx(t-d_1(t))+\\&D_dKx(t-d_2(t))+B_2\omega(t)。\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

其中

$$A_1=A+BK+\Delta A=A+BK+D_1F(t)E_1,$$
$$A_2=A_d+\Delta A_d=A_d+D_1F(t)E_2,$$

具有以下性质:

1)当外部干扰为零(即 $\omega(t)=0$时),系统稳定、正则、无脉冲模;

2)当系统为零初值时,$\|z(t)\|_2\leqslant\gamma\|\omega(t)\|_2$,这里 $\gamma>0$为给定的 H_∞ 性能;

3)性能指标 J存在上确界。

则称系统(1)为 H_∞ 保性能广义系统,式(5)为系统的状态反馈 H_∞ 保性能控制器。

引理 1[2] 假设系统(1)在零干扰情况下正则、无脉冲,则系统(1)的解在[0,$+\infty$)上存在唯一解,且无脉冲。

由文献[2]中定理1,得到引理2。

引理 2[8] 系统(7)在零干扰情况下是正则、无脉冲且稳定的,如果存在矩阵 P和矩阵 $Q_1>0$,$Q_2>0$,使得以下两个不等式成立,即

$$E^TP=P^TE\geqslant0,$$

$$P^TA_1+A_1^TP+\frac{1}{1-\beta_1}P^TA_2Q_1^{-1}A_2^TP+$$
$$\frac{1}{1-\beta_2}P^TB_dKQ_2^{-1}K^TB_d^TP+Q_1+Q_2<0。$$

引理 3[9] 给定矩阵 $Y_1=Y_1^T$,以及适当维数矩阵 Y_2和 Y_3,则不等式 $Y_1+Y_2FY_3+Y_3^TF^TY_2^T<0$对所有满足 $F^T(t)F(t)\leqslant I$的矩阵 F成立,当且仅当存在一个常数 $\varepsilon>0$,使得 $Y_1+\varepsilon Y_2Y_2^T+\varepsilon^{-1}Y_3^TY_3<0$成立。

3 主要结果

定理 1 给定常数 $\gamma>0$,对于不确定性广义闭环系统(7)和不确定性矩阵(3)以及性能指标(5),

如果存在矩阵 $Q_1>0$, $Q_2>0$及可逆矩阵 $P\in R^{n\times n}$使得不等式

$$E^TP=P^TE\geq 0 \tag{8a}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & P^TB_dK & P^TB_1 & C^T+K^TD^T \\ * & \Gamma_{22} & 0 & 0 & C_d^T \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & K^TD_d^T \\ * & * & * & -\gamma^2 I & B_2^T \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix}<0 \tag{8b}$$

成立。其中：$\Gamma_{11}=P^TA_1+A_1^TP+Q_1+Q_2+R_1+K^TR_2K$, $\Gamma_{12}=P^TA_2$, $\Gamma_{22}=-(1-\beta_1)Q_1$, $\Gamma_{33}=-(1-\beta_2)Q_2$。对所有的不确定性 $F^T(t)F(t)\leq I$成立，且矩阵 P具有以下形式：

$$P=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

其中：$P_1\in R^{r\times r}$, $P_2\in R^{(n-r)\times r}$, $P_3\in R^{(n-r)\times(n-r)}$，且 $P_1>0$, P_3为可逆阵。则不确定性广义系统(1)为 H_∞保性能系统。且 $u(t)=Kx(t)$是系统(1)的一个 H_∞鲁棒保性能控制器，性能指标函数(5)存在上确界：

$$J\leq tr(P_1)+\int_{-d_1(0)}^{0}\varphi^T(s)Q_1\varphi(s)ds+\int_{-d_2(0)}^{0}\varphi^T(s)Q_2\varphi(s)ds+\gamma^2\rho^2=J^*,$$

其中 $\rho=\|\omega(t)\|_2$。

证明　对于定义中的性质1)，不考虑干扰，即 $\omega(t)=0$。由于(8b)成立，则：

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & P^TB_dK \\ * & \Gamma_{22} & 0 \\ * & * & \Gamma_{33} \end{bmatrix}<0,$$

由矩阵的 Schur补引理可得

$$P^TA_1+A_1^TP+\frac{1}{1-\beta_1}P^TA_2Q_1^{-1}A_2^TP+\frac{1}{1-\beta_2}P^TB_dKQ_2^{-1}K^TB_d^TP+Q_1+Q_2<-(R_1+K^TR_2K)<0$$

又由式(4)和(9)可得

$$E^TP=P^TE\geq 0.$$

进而由引理2可知系统(7)稳定、正则且无脉冲。

对于定义中的性质2)，构造如下的 Lyapunov函数：

$$V(t)=x_1^T(t)P_1x_1(t)+\int_{t-d_1(t)}^{t}x^T(s)Q_1x(s)ds+\int_{t-d_2(t)}^{t}x^T(s)Q_2x(s)ds \tag{10}$$

其中 $x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $x_1(t)\in R^r$, $x_2(t)\in R^{n-r}$。

则式(10)沿闭环系统(7)的导数为

$$\begin{aligned}\dot V(t)=&2x^T(t)P^TE\dot x(t)+x^T(t)(Q_1+Q_2)x(t)-\\&(1-\dot d_1(t))x^T(t-d_1(t))Q_1x(t-d_1(t))-\\&(1-\dot d_2(t))x^T(t-d_2(t))Q_2x(t-d_2(t)).\end{aligned} \tag{11}$$

由式(2)可得

$$\begin{aligned}\dot V(t)\leq&2x^T(t)P^TE\dot x(t)+x^T(t)(Q_1+Q_2)x(t)-\\&(1-\beta_1)x^T(t-d_1(t))Q_1x(t-d_1(t))-\\&(1-\beta_2)x^T(t-d_2(t))Q_2x(t-d_2(t)).\end{aligned} \tag{12}$$

将式(7)代入式(12)，令

$\xi^T(t)=[x^T(t)\quad x^T(t-d_1(t))\quad x^T(t-d_2(t))\quad \omega^T(t)]$，得

$$\dot V(t)\leq\xi^T(t)\begin{bmatrix} S & P^TA_2 & P^TB_dK & P^TB_1 \\ & -(1-\beta_1)Q_1 & 0 & 0 \\ & & -(1-\beta_2)Q_2 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}\xi(t), \tag{13}$$

其中 $S=P^TA_1+A_1^TP+Q_1+Q_2$。不考虑干扰，即 $\omega(t)=0$，由(8b)成立，则 $\dot V(t)<0$。在给定的零初值条件下，对于给定的 $\gamma>0$，令

$$W=\int_0^\infty[z^T(t)z(t)-\gamma^2\omega^T(t)\omega(t)]dt \tag{14}$$

因为 $x(0)=0$，则 $V(0)=0$，则：

$$\begin{aligned}W=&\int_0^\infty[z^T(t)z(t)-\gamma^2\omega^T(t)\omega(t)+\dot V(t)]dt-\\&V(\infty)\leq\int_0^\infty[z^T(t)z(t)-\gamma^2\omega^T(t)\omega(t)+\\&\dot V(t)]dt\end{aligned} \tag{15}$$

将式(13)代入(15)，则：

$$W\leq\int_0^\infty\xi^T(t)\Sigma\xi(t)dt \tag{16}$$

其中：

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} \\ * & \Sigma_{22} & C_d^TD_dK & C_d^TB_2 \\ * & * & \Sigma_{33} & K^TD_d^TB_2 \\ * & * & * & \Sigma_{44} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{11}=&P^TA_1+A_1^TP+Q_1+Q_2+\\&(C+DK)^T(C+DK)\end{aligned}$$

$$\Sigma_{12}=P^TA_2+(C+DK)^TC_d,$$

$$\Sigma_{13}=P^TB_dK+(C+DK)^TD_dK,$$

$$\Sigma_{14}=P^TB_1+(C+DK)^TB_2,$$

$$\Sigma_{22}=C_d^{T}C_d-(1-\beta_1)Q_1,$$
$$\Sigma_{33}=K^{T}D_d^{T}D_dK-(1-\beta_2)Q_2,$$
$$\Sigma_{44}=B_2^{T}B_2-\gamma^2 I。$$

由 Schur补引理可知，式(8b)成立等价于 $\Sigma<0$。所以由式(14)可得 $\|z(t)\|_2\leqslant\gamma\|\omega(t)\|_2$。

对于定义中的性质 3)，由式(8b)和式(13)并运用 Schur补引理有：

$$\int_0^{\infty}\dot V(t)\,dt\leqslant\int_0^{\infty}[-x^{T}(t)(R_1+K^{T}R_2K)x(t)]\,dt+$$
$$\int_0^{\infty}[-z^{T}(t)z(t)+\gamma^2\omega^{T}(t)\omega(t)]\,dt\leqslant$$
$$\int_0^{\infty}[-x^{T}(t)(R_1+K^{T}R_2K)x(t)]\,dt+$$
$$\gamma^2\rho^2,\tag{17}$$

其中：$\rho=\|\omega(t)\|_2$。又因为

$$\int_0^{\infty}\dot V(t)\,dt=V(\infty)-V(0),$$

则

$$J=\int_0^{\infty}[x^{T}(t)R_1x(t)+u^{T}(t)R_2u(t)]\,dt=$$
$$\int_0^{\infty}[x^{T}(t)(R_1+K^{T}R_2K)x(t)]\,dt<$$
$$V(0)-V(\infty)+\gamma^2\rho^2<x^{T}(0)P_1x(0)+$$
$$\int_{-d_1(0)}^{0}\varphi^{T}(s)Q_1\varphi(s)\,ds+$$
$$\int_{-d_2(0)}^{0}\varphi^{T}(s)Q_2\varphi(s)\,ds+\gamma^2\rho^2。\tag{18}$$

由于上式得到的性能上界依赖于系统的初始状态 $x(0)$，而在实际中难以精确地确定系统的初始状态。可以假定 $x(0)$是一个满足 $E[x^{T}(0)x(0)]=I$ 的零均值随机变量，通过考虑性能指标的期望值，得

$$\tilde J=E[J]\leqslant E[x^{T}(0)P_1x(0)+$$
$$\int_{-d_1(0)}^{0}\varphi^{T}(s)Q_1\varphi(s)\,ds+$$
$$\int_{-d_2(0)}^{0}\varphi^{T}(s)Q_2\varphi(s)\,ds+\gamma^2\rho^2]\leqslant$$
$$\mathrm{tr}(P_1)+\int_{-d_1(0)}^{0}\varphi^{T}(s)Q_1\varphi(s)\,ds+$$
$$\int_{-d_2(0)}^{0}\varphi^{T}(s)Q_2\varphi(s)\,ds+\gamma^2\rho^2。$$

综上，定理结论成立。

定理 1给出了系统(1)的 H_∞ 保性能鲁棒控制器存在的一个充分条件，但由于式(8)中含有系统的不确定参数矩阵，因此不能直接用于控制器的设计，下面利用引理(3)将不确定性消去。

定理 2 给定常数 $\gamma>0$，对于系统(1)和性能指标函数(5)，存在状态反馈控制器 K使得闭环系统(7)是 H_∞ 保性能系统当且仅当存在适当常数 $\varepsilon>0$，$V_1>0$，$V_2>0$，具有适当维数的矩阵 Y和非奇异矩阵 $X\in R^{n\times n}$，使得对所有的不确定性，以下的不等式成立：

$$E^{T}X^{-1}=(X^{-1})^{T}E\geqslant 0,\tag{19a}$$

$$\begin{bmatrix}
\Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} & B_dY & B_1 & X^{T}C^{T}+Y^{T}D^{T} & \varepsilon D_1 & X^{T}E_1^{T} & X^{T} & Y^{T} & X^{T} & X^{T}\\
* & \Upsilon_{22} & 0 & 0 & X^{T}C_d^{T} & 0 & X^{T}E_2^{T} & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & \Upsilon_{33} & 0 & Y^{T}D_d^{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & -\gamma^2 I & B_2^{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & -R_1^{-1} & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & -R_2^{-1} & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -V_1 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -V_2
\end{bmatrix}<0。\tag{19b}$$

其中：

$$\Upsilon_{11}=AX+X^{T}A^{T}+BY+Y^{T}B^{T},$$
$$\Upsilon_{12}=A_dX+B_dY,$$
$$\Upsilon_{22}=-(1-\beta_1)X^{T}V_1^{-1}X,$$
$$\Upsilon_{33}=-(1-\beta_2)X^{T}V_2^{-1}X,$$

$$X=\begin{bmatrix}X_1 & 0\\ X_2 & X_3\end{bmatrix},\ X_1\in R^{r\times r},\ X_2\in R^{(n-r)\times r},\ X_3\in R^{(n-r)\times(n-r)}$$

且 $X_1>0$，X_3为可逆阵。

则闭环系统的 H_∞ 保性能控制器为

$$u(t)=YX^{-1}x(t),$$

相应的性能指标满足：

$$J \leqslant tr(X_1^{-1}) + \int_{-d_1(0)}^{0} \varphi^T(s) V_1^{-1} \varphi(s)\, ds + \int_{-d_2(0)}^{0} \varphi^T(s) V_2^{-1} \varphi(s)\, ds + \gamma^2 \rho^2 = J^*$$

证明　不等式(8b)等价于

$$\begin{bmatrix} \Upsilon & P^T(A_d + B_d K) & P^T B_d K & P^T B_1 & C^T + K^T D^T \\ * & -(1-\beta_1)Q_1 & 0 & 0 & C_d^T \\ * & * & -(1-\beta_2)Q_2 & 0 & K^T D_d^T \\ * & * & * & -\gamma^2 I & B_2^T \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^T D_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F [E_1 \quad E_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0] + [E_1 \quad E_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \times F^T \begin{bmatrix} P^T D_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0, \tag{20}$$

其中 $\Upsilon = P^T(A + BK) + (A + BK)^T P + Q_1 + Q_2 + R_1 + K^T R_2 K$。

应用引理(3)以及矩阵的 Schur补定理，式(20)对所有的不确定性成立当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$，使得

$$\begin{bmatrix} \Upsilon & P^T(A_d + B_d K) & P^T B_d K & P^T B_1 & C^T + K^T D^T & \varepsilon P^T D_1 & E_1^T \\ * & -(1-\beta_1)Q_1 & 0 & 0 & C_d^T & 0 & E_2^T \\ * & * & -(1-\beta_2)Q_2 & 0 & K^T D_d^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & B_2^T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon^{-1} I \end{bmatrix} \tag{21}$$

成立。为从式(21)解出控制器 K，令

$$T = diag\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I, I, I, I\}$$

对式(21)进行合同变换，左乘 T^T，右乘 T，记 $X = P^{-1}$，$Y = KP^{-1}$，$V_1 = Q_1^{-1}$，$V_2 = Q_2^{-1}$，经计算，整理，由矩阵的 Schur补定理，即可证得式(19b)。又由式(8a)显然有式(19a)成立。证毕。

在实际应用中，解如下的凸优化问题可获得闭环系统(7)的最小性能指标上界为

$$\min\ tr(S) + tr(M_1) + tr(M_2)$$

$$s.t. \begin{cases} \begin{bmatrix} -S & I \\ I & -X_1 \end{bmatrix} < 0, \quad \text{Inequality}\ (19b), \\ \begin{bmatrix} -M_1 & N_1^T \\ * & -V_1 \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} -M_2 & N_2^T \\ * & -V_2 \end{bmatrix} < 0. \end{cases} \tag{22}$$

其中：$\int_{-d_1(0)}^{0} \varphi(s)\varphi^T(s)\, ds = N_1 N_1^T$；

$\int_{-d_2(0)}^{0} \varphi(s)\varphi^T(s)\, ds = N_2 N_2^T$。

因为

$$\int_{-d_1(0)}^{0} \varphi^T(s) V_1^{-1} \varphi(s)\, ds = \int_{-d_1(0)}^{0} tr(\varphi^T(s) V_1^{-1} \varphi(s))\, ds = tr(N_1^T V_1^{-1} N_1),$$

而由优化问题(22)可得 $N_1^T V_1^{-1} N_1 < M_1$，所以 $\int_{-d_1(0)}^{0} \varphi^T(s) V_1^{-1} \varphi(s)\, ds < tr(M_1)$；同理，$\int_{-d_2(0)}^{0} \varphi^T(s) V_2^{-1} \varphi(s)\, ds < tr(M_2)$再由式(22)可知 $X_1^{-1} < S$，所以 $tr(X_1^{-1}) < tr(S)$。因此，可以通过使得 $tr(S)$，$tr(M_1)$，$tr(M_2)$的最小化来保证闭环系统(7)的最小性能指标上界的最小化。

问题(22)是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题，因此它的全局最优解便给出了使得性能指标 J最小化的最小系统性能上界 J^*。根据以上得到的 H_∞保性能控制器存在的条件，我们可以按照如下步骤进行最优 H_∞保性能状态反馈控制器的设计：

a) 应用 Matlab软件中有关 LMI工具箱中的 mincx命令求出满足(22)的($\tilde{\varepsilon}$，$\tilde{S}$，$\tilde{M}_1$，$\tilde{M}_2$，$\tilde{Y}$，$\tilde{X}$)。

b) 求出最优 H_∞保性能状态反馈控制器

$$u(t) = \tilde{K} x(t) = \tilde{Y}(\tilde{X})^{-1} x(t)$$

c) 求出相应的 H_∞可保性能指标

$$J^* = tr(\tilde{S}) + tr(\tilde{M}_1) + tr(\tilde{M}_2)$$

对系统(1)和性能指标(5)，令 $\alpha = \gamma^2$，如果以下优化问题

$$\min_{\varepsilon, X, Y, V_1, V_2, \alpha} \alpha \tag{23}$$

$$s.t.\ \text{Inequality}\ (19b)$$

有解(ε，X，α)，则可得到闭环系统(7)在符合保性能控制的条件下，系统的 H_∞性能有最小值 $\gamma = \sqrt{\alpha}$。

对系统(1)和性能指标(5)，性能指标的最优上界 J^*与 H_∞性能 γ相互制约，γ随 J^*的增加而降低，系统的抗干扰能力增强。反之亦然。

4 数值例子

为了阐明上述结果的有效性，对于系统（1）～（3），取参数值如下：

$$A=\begin{bmatrix}1.6 & 0.7\\ -1 & 2\end{bmatrix},\ A_d=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix},$$

$$B_d=\begin{bmatrix}0.4\\ 0.3\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.2\end{bmatrix},\ D_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$E_1=[0.5\quad 0.8],\ E_2=[0.2\quad 0.3],$$

$$C=[1\quad 0.2],\ C_d=[-2\quad 0.3],$$

$$D=[3],\ D_d=[0.4],\ B_2=[0.3],$$

$$R_1=I_2,\ R_2=[1]。$$

取时滞为：$d_1(t)=3+0.2\cos t$，$d_2(t)=4+0.3\sin 2t$，则可取式（2）中的 $\beta_1=0.2$，$\beta_2=0.4$ 初始条件设为

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix}e^{0.5t}\\ -e^{0.5t}\end{bmatrix},\ t\in(-\infty,0]，则$$

$$\int_{-d_1(0)}^{0}\varphi(s)\varphi^T(s)\,ds=N_1N_1^T,$$

$$\int_{-d_2(0)}^{0}\varphi(s)\varphi^T(s)\,ds=N_2N_2^T,$$

式中：$N_1=\begin{bmatrix}0.9794\\ -0.9794\end{bmatrix}$，$N_2=\begin{bmatrix}0.9908\\ -0.9908\end{bmatrix}$。

令 $\omega(t)$ 是单位平方可积的扰动，取 $\gamma=0.9$，建立优化问题（22），运用 Matlab 中的 LMI 工具箱求解器 mincx，可以求得优化问题（22）的 H_∞ 最优保性能控制器：

$$u(t)=YX^{-1}x(t)=[-2.7346\quad -1.3022]\,x(t)$$

相应的闭环系统的最优性能指标为

$$J^*=24.3826$$

解相应的优化问题（23）可得最小的 H_∞ 性能：

$$\gamma^*=0.4682$$

此时最优保性能值为：$J^*=1.7351\times10^5$。

保性能的最优上界 J^* 与 H_∞ 性能 γ 的关系如图 1所示，可知系统性能指标的最优上界与系统抗干扰能力是相互抑制的。

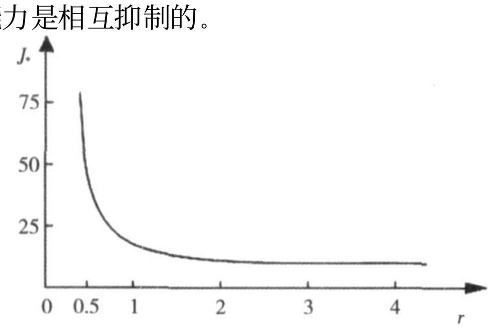

图 1 最优保性能 J^* 与 H_∞ 性能 r 的关系

Fig. 1 Relation of J^* and r

5 结 语

本文针对一类不确定时滞广义系统，在考虑给定的 H_∞ 性能 γ 的同时，结合了保性能控制思想，基于状态观测器研究其 H_∞ 保性能控制问题。并采用 LMI 方法，设计出了状态反馈 H_∞ 最优保性能鲁棒控制器。所设计的控制器能使闭环广义系统稳定、正则、无脉冲，且具有给定的 H_∞ 性能 γ 和某一个性能指标上确界。数值例子说明了本文方法的有效性。本文所给出的控制器既满足 H_∞ 控制的要求，又保证了性能指标尽可能的小。因此，与一般文献给出的控制器相比更具有实际意义。

参 考 文 献：

[1] XU S Y, DOOREN P V, STEFAN R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(7): 1122－1126

[2] FENG J, ZHU S, CHENG Z. Guaranteed cost control of linear uncertain singular time-delay systems[C]// Proc 41th IEEE Conf Decision Control. Las Vegas, 2002[s n], 1802－1807

[3] GEROMEL J C, PERES P L D, Souza S R. A convex approach to the mixed H_2/H_∞ control problem for discrete-time uncertain systems[J]. SIAM I J control and Optimizations, 1995, 33(6): 1816－1833.

[4] BAMBang R T, SHIM Emura E, UCHIDA K. Discrete-time H_2/H_∞ robust control with state feedback[C]// Proc of Amer contr conf. Boston: [s n], 1999: 1172－1173

[5] 刘岑枫，胡刚，任俊超．不确定广义系统的 H_∞ 保成本控制[J]．电机与控制学报，2005, 9(2): 124－127.
LIU Cenfeng, HU Gang, REN Junchao. Guaranteed cost H_∞ control for liner uncertain singular systems[J]. Electric Machines and Control, 2005, 9(2): 124－127.

[6] 袁薇，张庆灵，杜宝珠．不确定离散广义系统的 H_∞ 保成本控制[J]．系统工程与电子技术，2007, 29(1): 121－124.
YUAN Wei, ZHANG Qingling, DU Baozhu. H_∞ guaranteed cost control for uncertain discrete singular systems[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(1): 121－124.)

[7] 薛安克，蒋楠．不确定时滞系统 H_∞ 鲁棒保性能控制[J]．控制与决策，2002, 17(增刊): 681－689.
XUE Anke, JIANG Nan. Robust guaranteed cost H_∞ control for uncertain time-varying delay systems[J]. Control and Decision, 2002, 17(S): 681－689

[8] 张永强，马传贵，刘粉林．一类时滞奇异系统的 H_∞ 鲁棒控制[J]．控制与决策，2004, 19(3): 342－345.
ZHANG Yongqiang, MA Chuangui, LIU Fenlin. H_∞ robust control for a class of singular systems with time delay[J]. Control and Decision, 2004, 19(3): 342－345.

[9] XIE Lihua. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. Int J Control, 1996, 63(4): 741－750.

（编辑：于智龙）