doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2016.04.024

积分中值定理的几个相关应用

王振友,金朝永,温洁嫦,李锋,肖存涛
(广东工业大学 应用数学学院,广东 广州 510520)

摘 要 通过陈述积分中值定理及其推广定理的基本内容,分别归纳和对应给出了定理和推广形式的几个相关应用例题.

关键词 积分第一中值定理;积分第二中值定理;应用

中图分类号 **文献标识码** A **文章编号** 1008-1399(2016)04-0077-03

Applications of Integral Mean Value Theorem

WANG Zhenyou, JIN Chaoyong, WEN Jiechang, LI Feng, XIAO Cuntao
(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou, 510520)

Abstract This paper presents several application examples illustrating the integral mean value theorems and their extensions.

Keywords First integral mean value theorem; The second integral mean value theorem; Application

1 引言

积分中值定理可以理解为有限个数的算术平均值的推广,包含积分第一中值定理和积分第二中值定理两个定理.定理揭示了一种将积分化为函数值,或者是将复杂函数的积分化为简单函数的积分的方法,是高等数学的基本定理和重要手段.在求极限、判定某些性质、估计积分值等方面应用广泛[1-5].也有一些推广型的积分中值定理,主要是针对拉格朗日型和柯西型积分中值定理方面推广[6,7],本文主要是针对积分第一中值定理和积分第二中值定理及其推广定理等方面介绍相关的几个应用:

(1) 定理应用

积分中值定理在应用中所起到的重要作用是可以使积分号去掉,或者使复杂的被积函数化为相对简单的被积函数,从而使问题简化.

(2) 求极限

在一些含有定积分式的函数极限的计算中, 常常可以运用积分中值定理简化或转化问题.

(3) 不等式证明

在不等式中含有两个以上积分的不等式时,根据被积函数所满足的条件,灵活运用积分中值定理,以达到证明不等式成立的目的.

2 定理

定理 2.1(积分第一中值定理)

若 f 在 $[a,b]$ 上连续,则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

实际上将上述闭区间条件 $[a,b]$ 改为 (a,b) 定理亦成立[8].

推论 2.1(开区间形式的积分第一中值定理)

若 f 在 $[a,b]$ 上连续,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

成立.

定理 2.2(推广的积分第一中值定理)[2] 若 f 与 g 在 $[a,b]$ 上连续,且 g 在 $[a,b]$ 上不变号,则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得

收稿日期:2015-12-09
基金项目:广东省高等教育教学改革项目(GDJG20142170,GDJG20142178)
作者简介:王振友(1979-),男,副教授,研究方向:高等教育研究,生物医学数据分析,Emal:zhenyouw@gdut.edu.cn

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

定理2.3(积分第二中值定理)[2] 若f在$[a,b]$上可积.

(1) 若函数g在$[a,b]$上单调递减,且$g(x)\geqslant 0$,则至少存在一点$\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 若函数g在$[a,b]$上单调递增,且$g(x)\geqslant 0$,则至少存在一点$\eta\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x$$

积分中值定理还可以推广到曲线积分和曲面积分,会形成相应的第一类、第二类曲线积分中值定理和第一类、第二类曲面积分中值定理.限于篇幅,这里只介绍第一类曲面积分中值定理.

定理2.4(第一类曲面积分中值定理)[9] 设$R_1(x,y,z)$,$R_2(x,y,z)$在光滑曲面$\sum:z=z(x,y)$,$(x,y)\in D$上连续.并且$R_2(x,y,z)$在$\sum$上不变号,则至少存在一点$(\xi,\eta,\zeta)\in\sum$,使得

$$\iint_{\Sigma} R_1(x,y,z)\cdot R_2(x,y,z)\mathrm{d}S = R_1(\xi,\eta,\zeta)\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S = R_1(\xi,\eta,\zeta)\cdot S$$

特别的当$R_2(x,y,z)=1$时,上式变为

$$\iint_{\Sigma} R_1(x,y,z)\mathrm{d}S = R_1(\xi,\eta,\zeta)\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S = R_1(\xi,\eta,\zeta)\cdot S$$

其中S是光滑曲面$\sum$的面积大小.

3 例题

例题3.1(2000年研究生入学考试试题)[1] 设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续,且

$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 0,\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0$$

试证在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点ξ_1,ξ_2使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

证明 由已知条件$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$,积分中值定理及推论2.1知必有

$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = f(\xi_1)(\pi-0)=0,\xi_1\in(0,\pi)$$

则有$f(\xi_1)=0$

若在$(0,\pi)$内,$f(x)=0$仅有一个根$x=\xi_1$,由$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$知$f(x)$在$(0,\xi_1)$,$(\xi_1,\pi)$内异号,不妨设在$(0,\xi_1)$内$f(x)>0$,在$(\xi_1,\pi)$内$f(x)<0$,由

$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 0,\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0$$

以及$\cos x$在$(0,\pi)$内单减,可知:

$$0=\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x = \int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x + \int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x > 0$$

由此得出矛盾.

故$f(x)=0$至少还有另外一个实根ξ_2,$\xi_1\neq\xi_2$,且$\xi_2\in(0,\pi)$使得

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$$

例题3.2 设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$$

证明:$|\sin x|$的周期是π,所以$|\sin nx|$的周期是$\frac{\pi}{n}$.

则

$$\int_0^\pi f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/n} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x + \int_{\pi/n}^{2\pi/n} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x + \cdots + \int_{(n-1)\pi/n}^{n\pi/n} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n\int_{(i-1)\pi/n}^{i\pi/n} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x$$

根据定理2.1及推论2.1知:

$$\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)\pi/n}^{i\pi/n} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\int_{(i-1)\pi/n}^{i\pi/n}|\sin nx|\mathrm{d}x,\xi_i\in\left((i-1)\frac{\pi}{n},\frac{i\pi}{n}\right)$$

由周期函数积分性质知:

$$\int_{(i-1)\pi/n}^{i\pi/n}\left|\sin nx\right|\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{(i-1)\pi/n}^{i\pi/n}\left|\sin nx\right|\mathrm{d}(nx) = \frac{1}{n}\int_{(i-1)\pi}^{i\pi}\left|\sin t\right|dt = \frac{2}{n}$$

则

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\int_{(i-1)\pi/n}^{i\pi/n}\left|\sin nx\right|\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\frac{2}{n},\qquad \xi_i\in((i-1)\pi/n,i\pi/n)$$

两边取极限及根据定积分定义有:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\,|\sin nx|\,\mathrm{d}x =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\frac{\pi}{n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

例题 3.3 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为零,且其导数连续及 $f(a)=0$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$|f'(\xi)| > \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明:

当 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < 0$ 时,对任意的 $x\in(a,b)$ 有

$$|f'(\xi)| > \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

当 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 时,必有点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f'(x_0)\neq 0$(实际上如果 $f'(x_0)\equiv 0, x\in(a,b)$,则 $f(x)\equiv C, x\in(a,b)$,如此得到 $f(x)\equiv 0, x\in(a,b)$,这与题设矛盾,于是此时可取 $\xi = x_0$.

当 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ 时,由

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi_1),\ \xi_1\in(a,b)$$

$$f(\xi_1)=f(\xi_1)-f(a)=f'(\xi_2)(\xi_1-a),$$

$$\xi_2\in(a,\xi_1)\subset(a,b)$$

知

$$f'(\xi_2)=\frac{1}{(b-a)(\xi_1-a)}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x >$$

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

由此可知,此时可取 $\xi=\xi_2$,有

$$f'(\xi) > \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

例题 3.4(连续型随机变量的条件分布)

设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$,边际密度函数为 $p_X(x)$,$p_Y(y)$.在离散随机变量场合,其条件分布函数为 $P(X\leqslant x|Y=y)$.但是,因为连续随机变量取某个值的概率为零,即 $P(Y=y)=0$,所以无法用条件概率公式直接计算 $P(X\leqslant x|Y=y)$,一个很自然的想法就是:将 $P(X\leqslant x|Y=y)$ 看成是 $h\to 0$ 时 $P(X\leqslant x|y<Y\leqslant y+h)$ 的极限,即:

$$P(X\leqslant x|\,Y=y)=\lim_{h\to 0}P(X\leqslant x|\,y<Y\leqslant y=h)=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(X\leqslant x, y<Y\leqslant y=h)}{P(y<Y\leqslant y+h)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y}^{y+h}p(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\int_{y}^{y+h}p_Y(v)\,\mathrm{d}v}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h}p(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h}p_Y(v)\,\mathrm{d}v}$$

当 $p(x,y)$ 和 $p_Y(y)$ 在 y 处连续时,由积分中值定理可得:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h}p(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=p(u,y)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h}p_Y(v)\,\mathrm{d}v=p_Y(y)$$

所以

$$P(X\leqslant x|\,Y=y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{p(u,y)}{p_Y(y)}\mathrm{d}u$$

4　结论

本文主要陈述了积分中值定理,积分第一中值定理,积分第二中值定理及其推广形式的定理的基本内容,并分别给出了几个考研的经典例题和问题的解答过程,然后再介绍了概率论中连续型随机变量的条件分布公式的推导过程,最后又介绍了第一类和第二类的曲线积分与曲面积分的应用推广.

参考文献

[1]　方明亮.教与学-高等数学学习指导[M].乌鲁木齐:新疆电子出版社,2006.

[2]　华东师范大学.数学分析[M].3 版.北京:高等教育出版社.2004.

[3]　张新元.积分中值定理的较一般情况的几何意义及其推广形式[J].大学数学.2010,26(3):161-165.

[4]　刘俊先.积分中值定理的应用[J].赤峰学院学报,2010,26(6):3-4.

[5]　高国成,郑艳琳,张来亮.关于积分中值定理的一个注记[J].大学数学,2003,19(2):94-95.

[6]　陈玉.积分型中值定理的推广及统一表示[J].大学数学,2015,31(2):61-65.

[7]　陈玉.基于微分中值定理的积分中值定理[J].高等数学研究,2013,16 (6):42-45.

[8]　周芳芹,汤剑,朱溦.积分中值定理改进后的应用[J].邵阳学院学报(自然科学版),2012,9(3):18-20.

[9]　吴世玕,杜红霞.曲线积分与曲面积分中值定理[J].赣南师范学院学报,2006,3:29-31.